

Задача №1 (20 баллов) Четыре робота - Аз, Буки, Веди и Глаголь - участвовали в соревнованиях и заняли первые четыре места. На вопрос, кто какое место занял, были получены следующие ответы:

- 1) Аз был первым, Веди - вторым;
- 2) Аз был третьим, Веди был четвёртым;
- 3) Аз занял не первое, Глаголь - не четвёртое место.

Известно, что в первом и втором ответах одна часть верна, а другая неверна.

Третий ответ полностью верен.

Определите, какое место занял каждый из роботов. В ответ запишите последовательность заглавных букв, соответствующих первым буквам названий роботов, **от первого до четвёртого места**, например, АБВГ.

Ответ: ГВАБ.

Решение

Так как известно, что Аз не занял ни первого места, то Аз не может быть первым. Значит, не верно, что Аз - первый, значит верно, что Веди - второй. Тогда Веди не четвёртый, а Аз - третий.

Составим таблицу, сопоставив места и названия роботов:

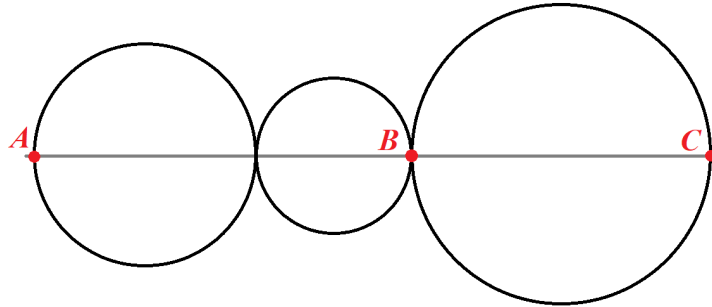
	1	2	3	4
Аз	-		+	
Буки				
Веди		+		-
Глаголь				

Добавим, что Глаголь занял не 4 место и получим:

	1	2	3	4
Аз	-	-	+	-
Буки	-	-	-	+
Веди	-	+	-	-
Глаголь	+	-	-	-

Запишем последовательность названий роботов от четвёртого до первого места Глаголь - 1, Веди - 2 Аз - 3, Буки - 4. Значит, ответ имеет вид ГВАБ.

Задача №2 (15 баллов) На поле расположены три окружности. Левая окружность радиуса 50 дм, центральная окружность диаметра 600 см, правая окружность диаметра 180 дм. Окружности расположены так, что они касаются друг друга. Точки старта (точки А, В и С) расположены на линии, соединяющей центры окружностей (см. рисунок).



Рисунок

Робот по левой окружности двигается *по часовой стрелке*. Роботы по центральной и правой окружности двигаются *против часовой стрелки*. Робот, стартовавший в точке А, повернулся на 7470° по окружности. Робот, стартовавший в точке В, повернулся на 3600° по окружности. Робот, стартовавший в точке С, повернулся на 6210° по окружности. Определите, на каком расстоянии оказались роботы, стартовавшие в точках А и С, после остановки. Ответ дайте в **сантиметрах**, приведя результат с точностью до целых. Округление стоит производить только при получении финального результата. Размерами робота можно пренебречь.

Ответ: 2441 см

Решение

Определим угол, на который повернётся робот по левой окружности:

$$7470:360=20,75 \text{ (об.)}$$

Значит, робот, двигавшийся по левой окружности, в итоге повернётся на четверть окружности по часовой стрелке.

Определим угол, на который повернётся робот по центральной окружности:

$$3600:360=10 \text{ (об.)}$$

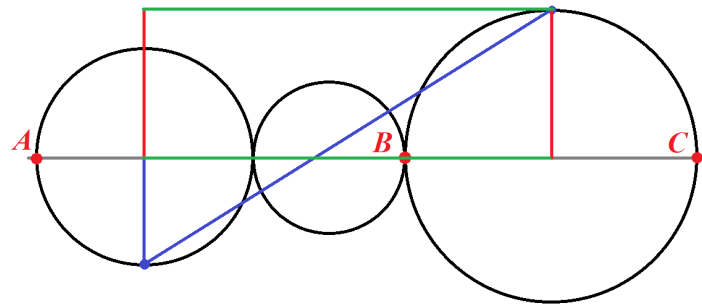
Значит, робот, двигавшийся по центральной окружности, в итоге останется на месте.

Определим угол, на который повернётся робот по правой окружности:

$$6210:360=17,25 \text{ (об.)}$$

Значит, робот, двигавшийся по правой окружности, в итоге повернётся на четверть окружности против часовой стрелке.

Сделаем чертёж:



Можно показать, что роботы находятся на концах гипотенузы с соответствующими катетами.

Расстояние между точками равно:

$$\sqrt{(50 + 60 + 180/2)^2 + (50 + 90)^2} = \sqrt{59600} = 244,13... \text{ (дм)}$$
$$244,13... \text{ дм} = 2441,3... \text{ см} \approx 2441 \text{ см}$$

Задача №3 (15 баллов) На полигоне из шестерёнок собрали двухступенчатую передачу. На ведущей оси передачи стоит шестерёнка с 8 зубьями, на ведомой оси первой ступени - с 32 зубьями. На ведущей оси второй ступени стоит шестерёнка с 16 зубьями, на ведомой оси передачи - с 40 зубьями. Ведущая ось передачи подсоединена к мотору. На ведомой оси передачи закреплён барабан, который может вращаться вместе с осью. Радиус окружности барабана равен 10 см. К барабану привязана тонкая, прочная, нерастяжимая нить, которая будет наматываться на барабан, если ось передачи будет вращаться. Нить наматывается всегда в один слой.

К другому концу нити прикреплена тележка на четырёх колёсах. Диаметр окружности каждого из колёс равен 5 см. На тележке установлена капельная машина, из крана которой каждые 5 секунд падает по 1 капле. Мотор равномерно вращает ведущую ось передачи. Между первой и 13 каплями расстояние равно 3 м 14 см. Определите, сколько оборотов в минуту совершает ведущая ось передачи. Считайте, что капли достигают поверхности полигона моментально. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$.

Ответ: 50 об./мин.

Решение

$$3 \text{ м } 14 \text{ см} = 314 \text{ см}$$

Обозначим за x - число оборотов в минуту, которое совершает ведущая ось передачи. Тогда ведомая ось передачи будет совершать:

$$x \cdot (8:32) \cdot (16:40) = 0,1x \text{ (об./мин)}$$

Вращение ведомой оси приводит во вращение барабан, на который наматывается нить, которая тянет тележку с капельной машиной. Значит, скорость движения тележки и, соответственно, капельной машины, можно определить следующим образом:

$$0,1x \cdot (2 \cdot \pi \cdot 10) = 2\pi x \text{ (см/мин.)}$$

Мы знаем, что каждые 5 секунд падает по 1 капле. Значит, расстояние между соседними каплями - это расстояние, которое проезжаем робот за 5 секунд.

Определим расстояние между двумя соседними каплями:

$$314:(13-1) = 314/12 \text{ (см)}$$

Определим скорость, с которой движется тележка:

$$(314/12):5 = 314/60 \text{ (см/с)}$$

Переведём скорость тележки в см/мин.:

$$(314/60) \cdot 60 = 314 \text{ (см/мин.)}$$

Приравняем скорости тележки, выраженные двумя способами:

$$2\pi x = 314$$

$$x = 314/(2\pi) \approx 50 \text{ (об./мин.)}$$

Задача №4 (15 баллов) Робот движется равномерно и прямолинейно на каждом из трёх участков трассы. Робот оснащён двумя одинаковыми колёсами, **радиус** которых равен 5 см. Колёса напрямую подсоединены к колёсам.

На первом участке оси моторов вращаются с 5 оборотов в минуту, на втором участке - в 2 раза быстрее, чем на первом участке, на третьем участке - в 2 раза быстрее, чем на втором участке пути. Известно, что первый участок робот проехал за 1 минуту, второй участок - в 5 раз быстрее, чем робот потратил на проезд по первому участку, а на третьем участке - в 3 раза дольше, чем на втором участке.

Определите, сколько времени потратил робот на проезд по всей трассе с колёсами, **радиус** которых в 1,4 раза больше, чем **радиус** колес первоначального робота, а число оборотов осей моторов постоянно на всём пути и равно 15 оборотам в минуту. Ответ дайте в секундах с точностью до целых. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$. Округление стоит производить только при получении финального ответа.

Ответ: 54 с

Решение

1 минута = 60 секунд

$2 \cdot \pi \cdot 5 = 10\pi$ (см) - длина окружности колеса

$5 \cdot 2 = 10$ (об./мин.) - число оборотов мотора на 2 участке

$10 \cdot 2 = 20$ (об./мин.) - число оборотов мотора на 3 участке

$1:5 = 0,2$ (мин.) - время на 2 участке

$0,2 \cdot 3 = 0,6$ (мин.) - время на 3 участке

$10\pi \cdot (5 \cdot 1 + 10 \cdot 0,2 + 20 \cdot 0,6) = 10\pi \cdot (5 + 2 + 12) = 190\pi$ (см) - длина трассы

$10\pi \cdot 1,4 = 14\pi$ (см) - длина окружности колёс во второй раз

$190\pi : (14\pi \cdot 15) = 190 : 210 = 19/21$ (мин.) - время на прохождение трассы в минутах

$19/21$ мин = $19 \cdot 60 / 21 = 54,28... \text{ с} \approx 54 \text{ с}$

Задача №5 (15 баллов) Робот оснащён двумя одинаковыми колёсами, **радиус** которых равен 6 см. Колёса напрямую подсоединены к моторам. Левым колесом управляет мотор А, правым колесом - мотор В. Ширина колеи равна 24 см. Посередине между колёс расположен маркер, с помощью которого робот может наносить изображение.

Робот выполнил следующие движения:

1. Ось мотора А повернулась на 800° , одновременно с этим ось мотора В повернулась на 600° ;
2. Ось мотора А повернулась на 400° , одновременно с этим ось мотора В повернулась на 600° .

Определите длину линии, которую нарисовал робот. Ответ дайте в сантиметрах с точностью до целых. При расчетах примите $\pi \approx 3,14$. Округление стоит производить только при получении финального ответа.

Ответ: 126 см

Решение

Робот совершил два движения. Оба раза это - движения по дуге. Маркер будет поворачиваться по дуге окружности, радиус которой больше, чем ширина колеи робота.

Воспользуемся формулами, связывающие радиус окружности R , по которой движется колесо робота, угол поворота робота α , радиус колеса робота r и угол поворота оси колеса φ_A :

$$R_A \alpha = r \varphi_A$$

$$R_A = \frac{\varphi_A}{\alpha} r$$

$$R_B \alpha = r \varphi_B$$

$$R_B = \frac{\varphi_B}{\alpha} r$$

Так как расстояние между центрами колёсами мы называем колеёй или шириной колеи и знаем его величину L , то можем записать следующее равенство:

$$\begin{aligned} R_A - R_B &= L \\ \frac{\varphi_A}{\alpha} r - \frac{\varphi_B}{\alpha} r &= L \\ \frac{(\varphi_A - \varphi_B)}{\alpha} r &= L \end{aligned}$$

Обозначим за O точку, расположенную по середине между колёс. Так как маркер расположен по середине между колёс, то:

$$R_O = R_B + L/2 = \frac{\varphi_B}{\alpha} r + \frac{(\varphi_A - \varphi_B)}{2\alpha} r = \frac{\varphi_B}{\alpha} r + \frac{\varphi_A}{2\alpha} r - \frac{\varphi_B}{2\alpha} r = \frac{(\varphi_A + \varphi_B)}{2\alpha} r$$

Тогда длина дуги, которую начертит маркер, движущийся по окружности радиуса R_O :

$$2\pi R_O \frac{\alpha}{360^\circ} = 2\pi \cdot \frac{(\varphi_A + \varphi_B)}{2\alpha} r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2\pi r \cdot \frac{(\varphi_A + \varphi_B)/2}{360^\circ}$$

Значит, робот начертит линию, состоящую из двух дуг, длиною:

$$\begin{aligned} & 2\pi r \cdot \frac{(800^\circ + 600^\circ)/2}{360^\circ} + 2\pi r \cdot \frac{(400^\circ + 600^\circ)/2}{360^\circ} = \\ & = \frac{\pi r}{360^\circ} \cdot (1400^\circ + 1000^\circ) = \frac{3,14 * 6}{360} * 2400 = 125,6 \text{ (см)} \\ & 125,6 \text{ см} \approx 126 \text{ см} \end{aligned}$$

Задача №6 (20 баллов) В равнобедренной трапеции ABCD на основаниях AD и BC как на диаметрах построили две полуокружности. Полуокружности касаются друг друга в точке, расположенной внутри трапеции. Угол при основании трапеции равен 60° . Длина большего основания AD равна 60 см. Определите, чему равна площадь трапеции. Ответ дайте в квадратных сантиметрах, приведя результат с точностью до целых. Округление стоит производить только при получении финального ответа.

Ответ: 1447 см^2

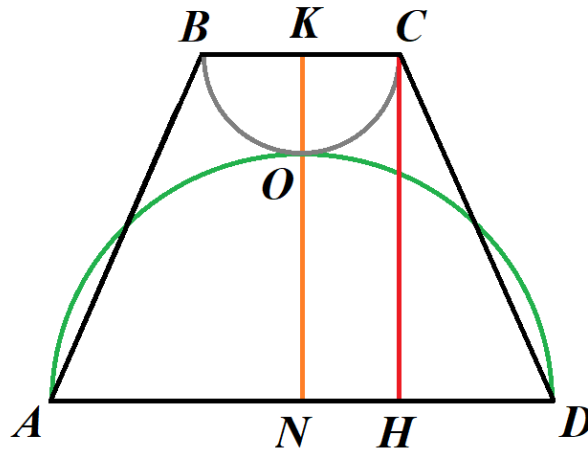
Решение

Проведём из центров окружностей радиусы в точку касания пересечения. Опустим из вершины C высоту на основание AD.

Площадь трапеции можно посчитать по формуле:

$$0,5 \cdot (BC + AD) \cdot CH$$

Сделаем чертёж:



Полуокружности касаются в точке O. Можно показать, что радиусы, проведённые в точку O, лежат на одной прямой, то есть, точки K, O и N лежат на одной прямой. Можно показать, что KN является высотой.

Обозначим BC за a.

Обозначим AD за b.

$BK = KO = KC = a/2$ (как радиусы).

$AN = NO = ND = b/2$ (как радиусы).

$KN = KO + ON = (a+b)/2$

$CH = KN = (a+b)/2$

Таким образом, площадь трапеции будет равна:

$$S = 0,5 \cdot (BC + AD) \cdot CH = 0,5 \cdot (BC + AD) \cdot 0,5 \cdot (BC + AD) = ((BC + AD)/2)^2$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник CHD.

$$HD = (AD - BC)/2 = (b - a)/2$$

$$\angle CDH = 60^\circ$$

$$\angle HCD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$CD = 2HD$$

$$CH = CD * \sin(60^\circ) = 2HD * \sqrt{3}/2 = HD * \sqrt{3}$$

Обозначим HD за x.

Тогда

$$(b - a)/2 = x$$

$$(a + b)/2 = x * \sqrt{3}$$

Решив данные уравнения в системе, получим:

$$a = (2 - \sqrt{3})b$$

$$x = (b - a)/2 = (b - 2b + b\sqrt{3})/2 = b(\sqrt{3} - 1)/2$$

Посчитаем площадь трапеции:

$$(a + b)/2 = ((2 - \sqrt{3})b + b)/2 = (3 - \sqrt{3})b/2$$

$$S = ((3 - \sqrt{3})b/2)^2 = \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 * b^2 =$$

$$= \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 * 3600 = 1446,92563... \approx 1447 \text{ (см}^2\text{)}$$